

Zadanie: Oscylator harmoniczny – wózek i sprężyna

Wózek o masie $m = 200$ g jest doczepiony do sprężyny, której drugi koniec jest unieruchomiony. Wózek wykonuje drgania wzdłuż osi poziomej. Opory ruchu, masę kółek oraz masę sprężyny pomijamy.

Amplituda drgań wynosi

$$A = 4 \text{ cm},$$

a energia całkowita układu wynosi

$$E_c = 4 \text{ mJ}.$$

Zadania

1. Oblicz maksymalną prędkość wózka.
2. Oblicz stałą sprężystości sprężyny.
3. Oblicz okres i częstotliwość drgań wózka.
4. Oblicz energię kinetyczną E_k i potencjalną E_p w chwili, gdy wychylenie wynosi

$$x = 2 \text{ cm}.$$

5. Oblicz prędkość wózka przy wychyleniu $x = 2 \text{ cm}$.
6. Narysuj wykresy zależności $E_k(x)$, $E_p(x)$ i E_c od wychylenia x i zaznacz punkt $x = 2 \text{ cm}$.

Rozwiązanie

Dane

$$m = 0,20 \text{ kg}, \quad A = 0,04 \text{ m}, \quad E_c = 0,004 \text{ J}, \quad x = 0,02 \text{ m}$$

1. Maksymalna prędkość

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m v_{max}^2 \\ 0,004 &= \frac{1}{2} \cdot 0,20 \cdot v_{max}^2 \\ v_{max}^2 &= 0,04 \\ v_{max} &= 0,20 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2. Stała sprężystości sprężyny

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} k A^2 \\ 0,004 &= \frac{1}{2} k (0,04)^2 \\ 0,004 &= 0,0008 k \\ k &= 5 \text{ N/m} \end{aligned}$$

3. Okres i częstotliwość drgań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0,20}{5}} = 2\pi \cdot 0,2 \approx 1,26 \text{ s}$$
$$f = \frac{1}{T} \approx 0,79 \text{ Hz}$$

4. Energia kinetyczna i potencjalna przy $x = 2 \text{ cm}$

Energia potencjalna:

$$E_p = E_c \frac{x^2}{A^2} = 0,004 \cdot \frac{0,02^2}{0,04^2} = 0,004 \cdot 0,25 = 0,001 \text{ J} = 1 \text{ mJ}$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = E_c - E_p = 0,004 - 0,001 = 0,003 \text{ J} = 3 \text{ mJ}$$

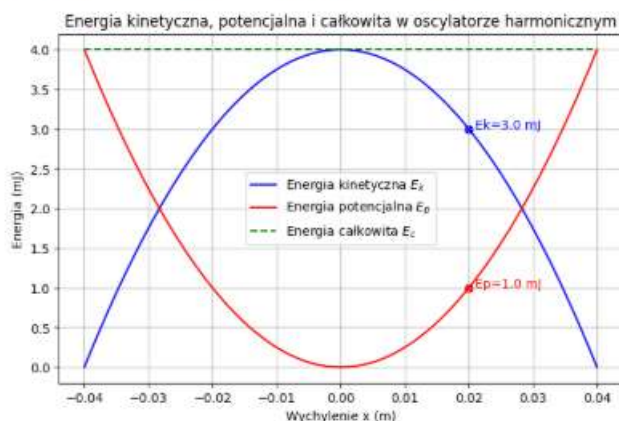
5. Prędkość wózka przy $x = 2 \text{ cm}$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,003}{0,20}} = \sqrt{0,03} \approx 0,173 \text{ m/s}$$

6. Wykres energii

Na wykresie:

- Niebieska linia – energia kinetyczna $E_k(x)$
- Czerwona linia – energia potencjalna $E_p(x)$
- Zielona linia przerywana – energia całkowita E_c
- Punkt przy $x = 0,02 \text{ m}$ pokazuje odpowiadające energie $E_k = 3 \text{ mJ}$, $E_p = 1 \text{ mJ}$



Oto gotowy wykres energii wózka-sprężyny z zaznaczonym punktem $x = 2 \text{ cm}$:

- Niebieski punkt – energia kinetyczna $E_k = 3 \text{ mJ}$
- Czerwony punkt – energia potencjalna $E_p = 1 \text{ mJ}$
- Zielona linia przerywana – energia całkowita $E_c = 4 \text{ mJ}$

Widać, że energia kinetyczna maleje wraz ze wzrostem wychylenia, a energia potencjalna rośnie, przy czym suma obu energii pozostaje stała i równa E_c .